Carpeta de Matemática 8

Nueva edición ampliada y actualizada

CUADERNILLO 7

# Nueva carpeta de Matemática II

Ruth Schaposchnik (coord.)
Luis Garaventa - Nora Legorburu
Patricia Rodas - Claudio Turano

Alumno/a

Curso

**7. Funciones** 3
*Revisión inicial* ..... 4
Las coordenadas cartesianas ..... 5
Lectura y comparación de gráficos ..... 6
Las funciones y sus gráficas ..... 7
Crecimiento y decrecimiento ..... 7
Funciones que se expresan mediante fórmulas ..... 9
Algunas funciones especiales ..... 10
Función de proporcionalidad directa ..... 10
Función de proporcionalidad inversa ..... 11
Función lineal ..... 12
*En el mundo real* ..... 13
Los gráficos funcionales y la medicina ..... 13
Los gráficos funcionales y la naturaleza ..... 14
*Más actividades* ..... 15
*Autoevaluación* ..... 16

**8. Probabilidades y estadística** 17
*Revisión inicial* ..... 18
Probabilidad ..... 19
Técnicas de conteo ..... 20
Estadística ..... 22
Tablas de frecuencias: intervalos de clase ..... 23
Lectura de gráficos estadísticos ..... 24
El promedio, la moda y la mediana ..... 25
*En el mundo real* ..... 27
Las probabilidades y los juegos de azar ..... 27
El yolé ..... 28
*Más actividades* ..... 29
*Autoevaluación* ..... 30
*Actividades integradoras* ..... 31

EJEMPLAR DE PROMOCIÓN

PROHIBIDA SU VENTA Y SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

AIQUE

**Este CUADERNILLO 7 pertenece a la Nueva carpeta de Matemática II.**
**No puede venderse por separado.**

**DIRECCIÓN EDITORIAL**
Teresita Valdettaro

**COORDINACIÓN DEL ÁREA DE MATEMÁTICA**
Ruth Schaposchnik

**EDICIÓN**
Nora Legorburu

**COPIEDICIÓN**
Maricel Besse

**CORRECCIÓN**
Cecilia Biagioli (coordinación)
Inés Gugliotella

**SUPERVISIÓN GRÁFICA**
Verónica Uher
Victoria Maier

**COORDINACIÓN GRÁFICA**
Silvina Roveda

**DIAGRAMACIÓN**
Daniel Balado
Gabriel Lauría
Silvana López
Estudio DOBLEVUELO

**ILUSTRACIONES**
Alejandra Lunik
Diego Molina
Diego Stigliano

**FOTOGRAFÍA**
Archivo Aique

**PRODUCCIÓN INDUSTRIAL**
Pablo Sibione

Agradecemos la colaboración de Gustavo Delupi en el control de las respuestas.

© Copyright Aique Grupo Editor S. A.
Valentín Gómez 3530 (C1191AAP)
Ciudad de Buenos Aires
Teléfono y fax: 4867-7000
e-mail: editorial@aique.com.ar - www.aique.com.ar

Hecho el depósito que previene la Ley 11.723
LIBRO DE EDICIÓN ARGENTINA
I.S.B.N. 978-987-06-0059-6
Primera edición

La reproducción total o parcial de este material en cualquier forma que sea, idéntica o modificada y por cualquier medio o procedimiento, sea mecánico, electrónico, informático, magnético y sobre cualquier tipo de soporte, no autorizada por los editores, viola derechos reservados, es ilegal y constituye un delito.

Nueva carpeta de matemática II / Luis Garaventa...[et.al.]. ; coordinado por Ruth Schaposchnik - 1a ed. - Buenos Aires : Aique Grupo Editor, 2007.
256 p. ; 28x20 cm.

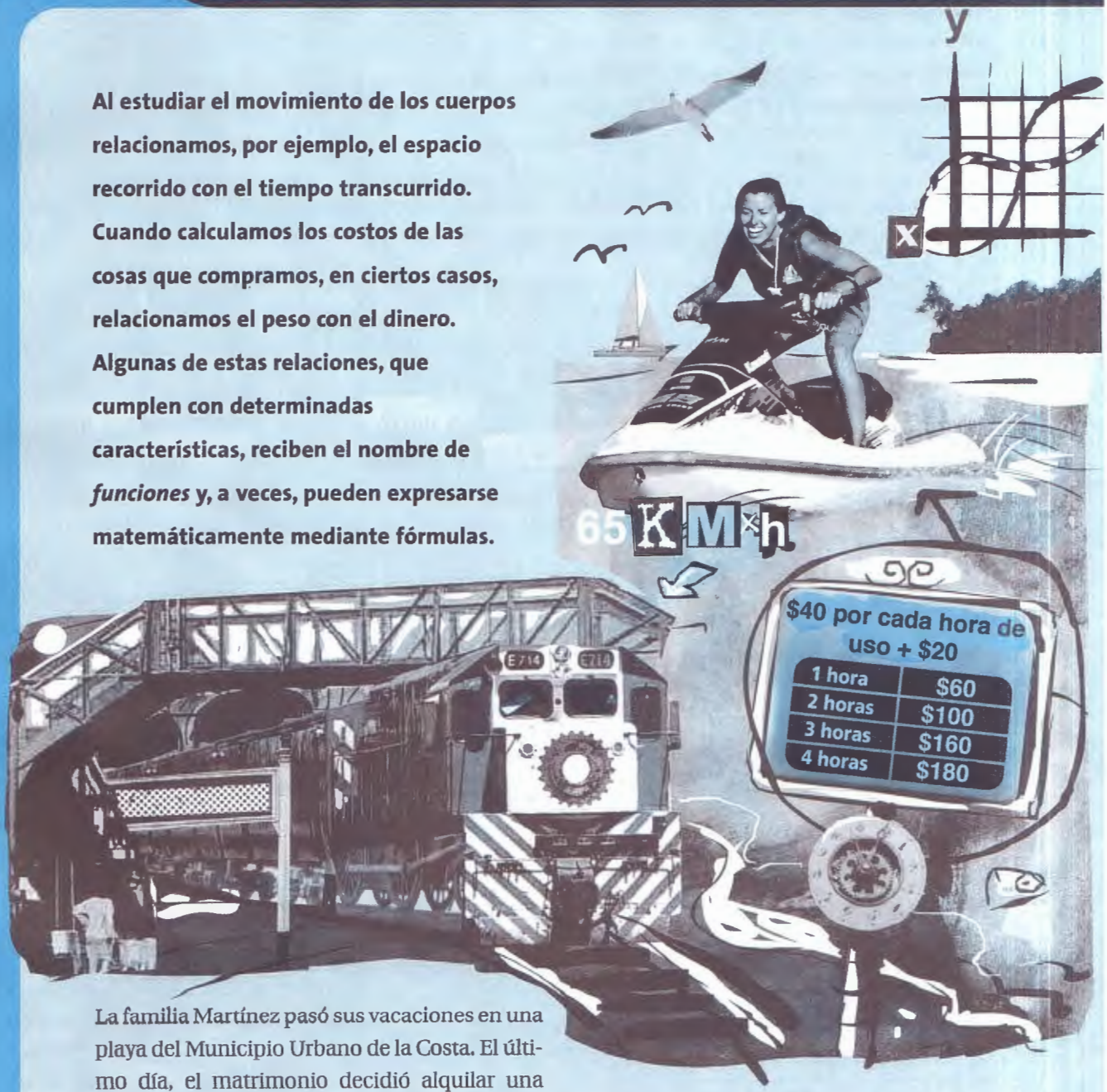
ISBN 978-987-06-0059-6

1. Matemática-Enseñanza Media. I. Schaposchnik, Ruth, coord.
CDD 510.712

Esta edición se terminó de imprimir en enero de 2007 en Morello S. A., Víctor Martínez 1881, Ciudad de Buenos Aires.

# 7 FUNCIONES

**Al estudiar el movimiento de los cuerpos relacionamos, por ejemplo, el espacio recorrido con el tiempo transcurrido. Cuando calculamos los costos de las cosas que compramos, en ciertos casos, relacionamos el peso con el dinero. Algunas de estas relaciones, que cumplen con determinadas características, reciben el nombre de *funciones* y, a veces, pueden expresarse matemáticamente mediante fórmulas.**




La familia Martínez pasó sus vacaciones en una playa del Municipio Urbano de la Costa. El último día, el matrimonio decidió alquilar una moto de agua para darles el gusto a sus hijos.

Cuando estaban por retirar la moto, Andrea se dio cuenta de que había un error en el cartel.

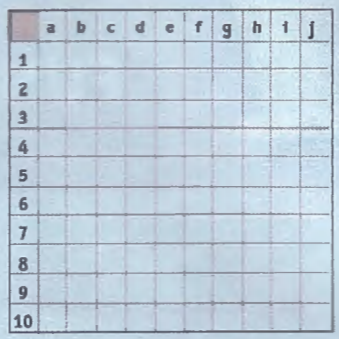
- ¿Cuál es el error que detectó Andrea?
- Si los chicos cuentan con $260, ¿cuántas horas podrán alquilar la moto?

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

# REVISIÓN INICIAL

**1** Observen el esquema, que corresponde a un tablero de juego de la batalla naval, y ubiquen los barcos en las posiciones que se indican.

**Un acorazado:** (h; 3), (h; 4), (h; 5), (h; 6).
**Dos cruceros:** (a; 7), (b; 7),(c; 7); (i; 8), (i; 9), (i; 10).
**Tres destructores:** (e; 8), (e; 9); (e; 2), (f; 2); (i; 1), (j; 1).
**Cuatro submarinos:** (a; 1); (g; 10); (e; 5); (a; 9).




**2** Las tres tablas siguientes corresponden a relaciones de proporcionalidad. En cada caso, indiquen de qué clase de proporcionalidad se trata, hallen la constante $k$ y completen los datos que faltan.

a)

| A | B |
|---|---|
| 1,2 | 0,6 |
| 0,8 | 0,4 |
| | 1 |
| 3,2 | |

.....

b)

| A | B |
|---|---|
| 2 | 3 |
| 1,5 | 2,25 |
| 1 | |
| | 0,2 |

.....

c)

| A | B |
|---|---|
| 5 | 1 |
| 10 | 0,5 |
| 1 | |
| | 2 |

.....

**3** Encuentren el valor de $x$.

a) $2 \cdot x + 1 = 3$

.....

b) $(1-5) \cdot x - 6 : (-2) = -5 + 4$

.....

c) $\frac{x-2}{3} = \frac{x-1}{2}$

.....

d) $2 - x = 8$

.....

e) $3x - 15 = 2x - 4^2$

.....

f) $2 \cdot (-4 + 2) + x = 7$

.....

g) $\frac{3,5}{2} = \frac{1}{x+1}$

.....

**4** Expliquen la regla de formación y agreguen cuatro números a cada una de las siguientes sucesiones:

a) −2, −4, −6, −8

.....

b) 3, 5, 7, 9, 11

.....

c) $8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}$

.....

d) 1, 4, 9, 16

.....

e) 6, 3, 0

.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

# Las coordenadas cartesianas

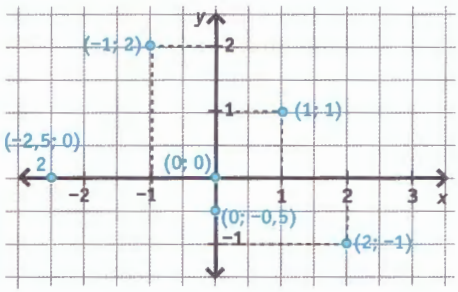
## Para leer y recordar

**Para identificar un punto P del plano se utilizan sus *coordenadas cartesianas*, que se anotan en forma de par ordenado, así:**

$$P = (x; y)$$

**$x$ es la *abscisa*.**
**Representa el desplazamiento sobre el eje horizontal (eje de las *abscisas*) respecto del *origen de coordenadas*.**

**$y$ es la *ordenada*.**
**Representa el desplazamiento sobre el eje vertical (eje de las *ordenadas*) respecto del *origen de coordenadas*.**

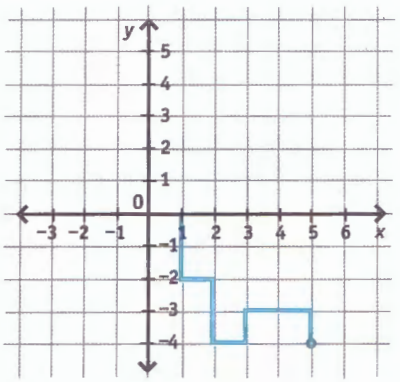



**5** Una empresa de remises cuenta con un plano y una radio para poder establecer la posición de cada uno de sus autos. Un empleado va registrando los desplazamientos de los vehículos con líneas horizontales o verticales, a partir de la información que los choferes dan por radio cada vez que doblan una esquina. La central de la empresa se encuentra en el punto (0; 0) del plano.

**a)** El remís de Manuel salió de la central y fue a buscar a un cliente. Marquen el trayecto que tuvo que hacer si a la central reportó las coordenadas (–2; 0), (–2; 2), (–3; 2) y (–3; 4).

**b)** El coche de Andrea acaba de dejar a un cliente en el punto (5; 4) y vuelve a la central reportando los siguientes puntos: (6; 4), (6; 3), (3; 3), (3; 0) y (0; 0). Marquen su trayectoria.

**c)** El trayecto marcado en el gráfico fue reportado por Oscar al salir a buscar a un pasajero. Escriban las coordenadas que reportó.




.....

**6** Marquen en el plano los siguientes puntos: $A = \left(-\frac{7}{2}; 2\right)$ y $B = \left(\frac{5}{2}; 2\right)$.
Indiquen las coordenadas de dos puntos que formen con A y B las siguientes figuras, y dibujen cada una con distinto color.

**a)** Un rectángulo.

.....

**b)** Un cuadrado.

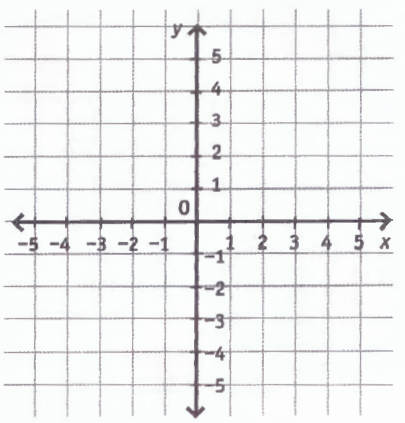
.....

**c)** Un trapecio.

.....

**d)** Un paralelogramo.

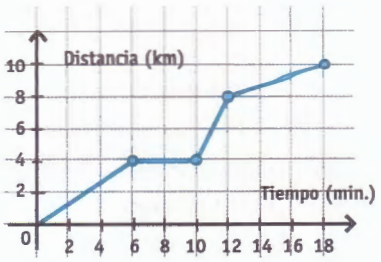
.....




© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

# Lectura y comparación de gráficos

**7** Carolina y Sabrina trabajan en la misma empresa. Carolina tiene auto y suele pasar a buscar a Sabrina para ir juntas a trabajar.
Observen el gráfico, que muestra cómo varía la distancia recorrida por Carolina, a medida que transcurre el tiempo, desde que sale de su casa hasta que llega a la empresa, y contesten a las preguntas.




**a)** ¿Cuánto tarda en llegar a la casa de Sabrina?

.....

**b)** ¿A qué distancia de la casa de Carolina se encuentra la de Sabrina?

.....

**c)** ¿Cuánto tiempo la espera?

.....

**d)** En una parte del trayecto van más rápido porque utilizan una autopista. ¿Qué parte de la gráfica es la que corresponde a este tramo?

.....

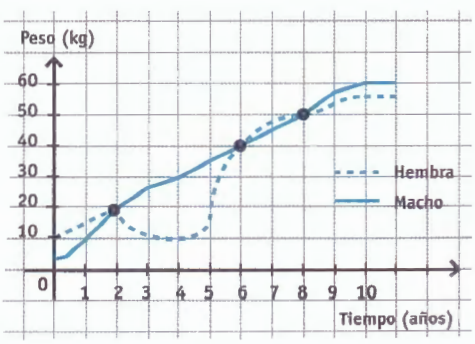
**e)** ¿A qué distancia se encuentra la empresa de la casa de Sabrina?

.....

## Para leer y recordar

- **En la situación anterior, la gráfica describe la relación entre dos variables: el tiempo, representado sobre el eje horizontal, es la *variable independiente*, y la distancia recorrida, representada sobre el eje vertical, es la *variable dependiente*.**
- **Para interpretar un gráfico siempre se lee de izquierda a derecha, observando cómo varía la variable dependiente al aumentar la variable independiente.**

**8** En el zoológico de la ciudad nacieron el mismo día un mono y una mona. El gráfico muestra la evolución de sus pesos a lo largo de los diez primeros años. Obtengan del gráfico la información y respondan a las preguntas.




**a)** ¿A qué edad ambos primates tenían el mismo peso?

.....

**b)** La mona estuvo enferma durante un tiempo y bajó de peso. ¿A qué edad, aproximadamente?

.....

**c)** ¿Cuál de los dos pesaba más cuando nació?

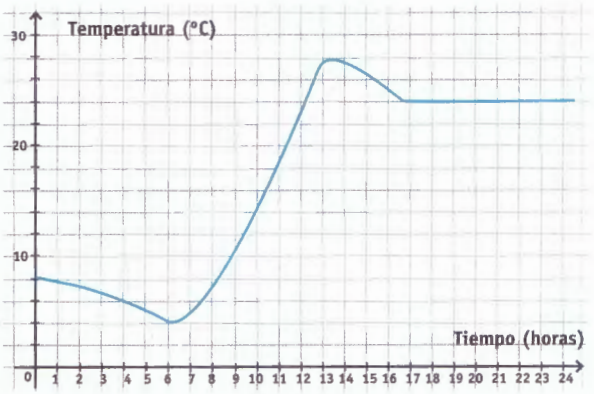
.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

# Las funciones y sus gráficas

## Crecimiento y decrecimiento

**9** Observen el gráfico, que muestra la evolución de la temperatura en la ciudad de Bahía Blanca durante un día de primavera, y completen las siguientes frases.

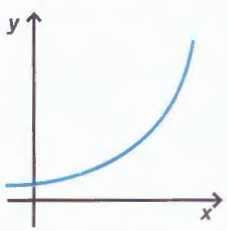



Desde la 0 h hasta las 6 de la mañana, la temperatura estuvo en descenso; luego fue en aumento hasta las _____ h, momento en el que volvió a disminuir, hasta las _____ h, y desde ese momento se mantuvo constante hasta las 24 h.
La temperatura mínima registrada ese día fue de _____ a las _____ h, y la máxima fue de _____ a las _____ h.

### Para leer y recordar

- Una *función* es una relación que asocia a cada valor de la variable independiente un *único* valor de la variable dependiente.
- Cuando se trabaja con funciones se suele nombrar con $x$ a la variable independiente y con $y$ o $f(x)$ a la variable dependiente.

Función *creciente*

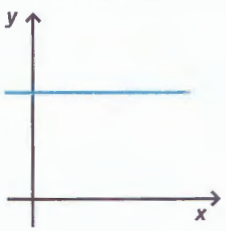



Cuando $x$ aumenta, $y$ también aumenta.

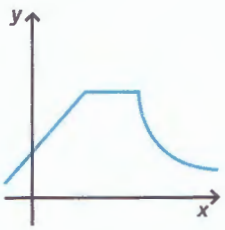
Función *decreciente*

Cuando $x$ aumenta, $y$ disminuye.

Función *constante*




Cuando $x$ aumenta, $y$ se mantiene estable.




Una función puede tener tramos en los que es creciente, decreciente y constante.

**10** Los datos de la tabla informan la presión que ejerce el agua en distintas profundidades.

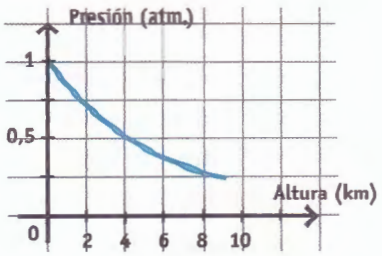
| Profundidad (m) | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 |
|---|---|---|---|---|---|
| Presión (atm.) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

a) Marquen los puntos en un gráfico y, luego, únanlos con una línea.

b) ¿Es una función creciente, decreciente o constante? Justifiquen la respuesta.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

**11** La densidad del aire disminuye al aumentar la altura respecto de la superficie terrestre. Esto trae aparejado que la presión sea distinta a diferentes alturas. El gráfico muestra la relación entre la altura y la presión atmosférica.




a) ¿Cuál es la variable independiente considerada?

.....

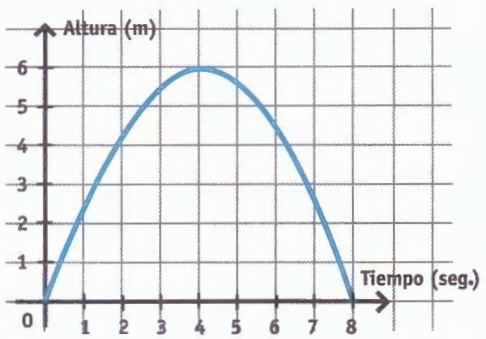
b) ¿Cuál es la variable dependiente?

.....

c) ¿Cómo varía la presión a medida que aumenta la altura?

.....

**12** Se arroja una pelota de tenis verticalmente hacia arriba. El gráfico muestra a qué altura se encuentra la pelota en cada instante posterior al lanzamiento.
Respondan a las preguntas.




a) ¿Durante cuánto tiempo la pelota subió?

.....

b) ¿Cuál fue la altura máxima que alcanzó? ¿En qué momento?

.....

c) La pelota fue lanzada desde el suelo. ¿Cómo se aprecia esto en el gráfico?

.....

d) ¿Cuánto tiempo transcurrió entre que la pelota fue lanzada y volvió a tocar el suelo?

.....

**13** Las ventas de una heladería varían a lo largo del año como se muestra en el gráfico, desde enero hasta diciembre.
¿En qué hemisferio se encuentra esta heladería? Justifiquen la respuesta.

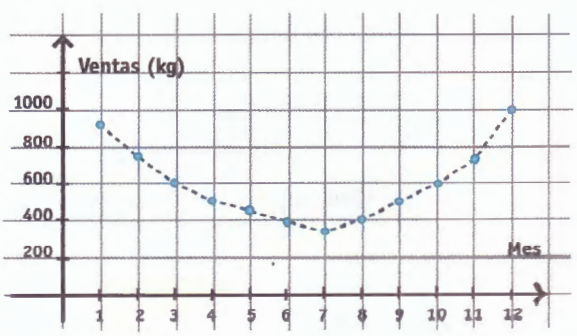
.....

.....

.....

.....

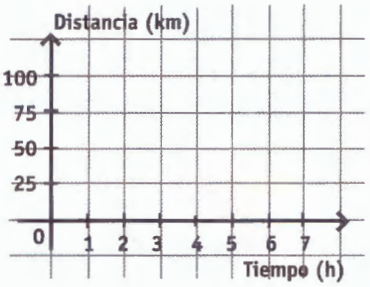
.....




© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

# Funciones que se expresan mediante fórmulas

**14** Fernando sale a pasear en moto con su novia. Viajan a una velocidad constante de 25 km/h.




**a)** Completen la siguiente tabla con las distancias que lleva recorridas Fernando en cada momento y expliquen cómo las calcularon.

| Tiempo (h) | 0 | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| Distancia (km) | 0 | | | | |

.....

**b)** Escriban una fórmula que permita calcular la distancia recorrida $D$ (en km) en función del tiempo $t$ transcurrido (en horas).

.....

**c)** Marquen los puntos en el gráfico y únanlos con una línea.

## Para observar

**Muchas funciones tienen asociada una *fórmula* que sirve para calcular cada valor de *y* a partir del correspondiente valor de *x*.**

**Por ejemplo, si consideramos los cuadrados de lado *x* y la función *f* que asocia a cada valor de *x* el perímetro del cuadrado, la fórmula de esta función es $f(x) = 4 \cdot x$**

**15** Mirta tiene 100 m de alambre y quiere cercar un terreno rectangular. Antes de empezar, se puso a investigar las distintas formas de hacer rectángulos que tengan 100 m de perímetro.

**a)** Después de realizar algunos cálculos, Mirta llegó a la conclusión de que, si la base mide $x$ metros, la altura medirá $(50 - x)$ metros. ¿Les parece correcta esta idea? ¿Por qué?

.....

**b)** Completen la siguiente tabla referida a los rectángulos en los que está pensando Mirta.

| Base (m) | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Área ($m^2$) | | | | | | | |

**c)** Escriban una fórmula que sirva para calcular el área $A$ (en $m^2$) en función de la base $x$ (en m).

.....

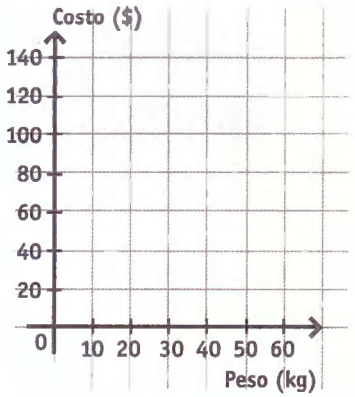
**d)** Marquen los valores de la tabla en un sistema cartesiano y tracen una gráfica aproximada de la función.

# Algunas funciones especiales

## Función de proporcionalidad directa

**16** Una empresa de productos lácteos fabrica quesos de todo tipo. La siguiente tabla muestra algunos datos del costo de la mozarela según el peso.

| Peso (kg) | 10 | 20 | 30 | 40 |
|---|---|---|---|---|
| Costo ($) | 30 | 60 | 90 | 120 |




**a)** Completen las razones formadas con pares de valores de la tabla.

$$\frac{30}{10} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{90}{30} = \frac{\quad}{\quad} = \quad$$

**b)** ¿Qué tipo de relación vincula a estas variables?

.....

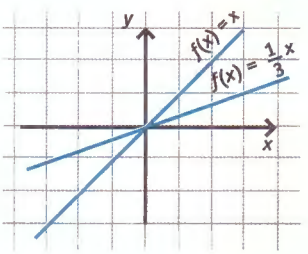
**c)** Marquen los puntos en el gráfico, únanlos con una línea y prolónguenla hasta que corte los ejes.

**d)** ¿Qué forma tiene la gráfica? ¿Contiene al punto (0; 0)?

.....

### Para leer y recordar

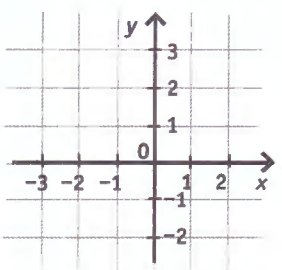
- Toda función que relaciona dos variables directamente proporcionales se llama *función de proporcionalidad directa*.
- Su fórmula es del tipo $f(x) = k \cdot x$ (con $k \neq 0$) y su gráfica es una recta que contiene al origen de coordenadas.
- La constante de proporcionalidad $k$ es la *pendiente* de la recta y está relacionada con su inclinación.




**17** Completen las tablas, las gráficas y el valor de la constante de cada una de las siguientes funciones de proporcionalidad directa.

**a)** $f(x) = 2x$

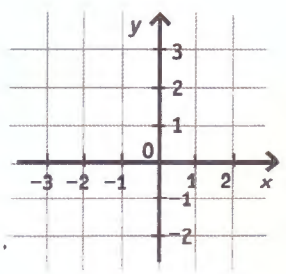
| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | |
| −1 | |
| 1 | |
| $-\frac{1}{2}$ | |




$k =$ .....

**b)** $f(x) = \frac{1}{2}x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | |
| 2 | |
| −2 | |
| −1 | |




$k =$ .....

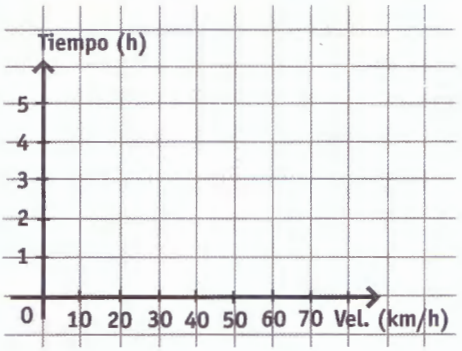
© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

# Función de proporcionalidad inversa

**18** Una locomotora debe recorrer una distancia de 60 km a velocidad constante. El tiempo que tarde en hacerlo dependerá de la velocidad con la que se desplace.

| Vel. (km/h) | 60 | | 20 | | 12 |
|---|---|---|---|---|---|
| Tiempo (h) | 1 | 2 | | 4 | |

**a)** Completen la tabla, marquen los puntos en el sistema cartesiano y tracen la gráfica que resulta al unirlos.




**b)** ¿Es una función de proporcionalidad directa? ¿Por qué?

.....

**c)** Completen los productos de pares de valores de la tabla.

60 . 1 = ____ . 2 = 20 . ____ = ____ . ____ = ____

**d)** ¿Qué relación vincula a estas variables?

.....

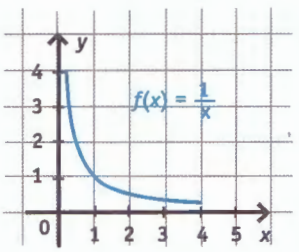
## Para leer y recordar

- **Toda función que relaciona dos variables inversamente proporcionales se llama *función de proporcionalidad inversa* y tiene una fórmula del tipo**

$$f(x) = \frac{k}{x} \quad (x \neq 0 \text{ y } k \neq 0)$$

- **Los puntos de su gráfica están sobre una curva llamada *hipérbola*, que no tiene contacto con los ejes cartesianos.**

**Aquí consideramos estas funciones y sus gráficas sólo para valores positivos de *x* y de *k*.**




**19** Analicen cada una de las siguientes tablas e indiquen si corresponde a una función de proporcionalidad. En caso de que sea así, indiquen de qué tipo, hallen la constante de proporcionalidad, escriban la fórmula correspondiente y realicen el gráfico.

**a)**

| x | f(x) |
|---|---|
| 1 | −2 |
| −1 | 2 |
| 4 | −8 |
| −3 | 6 |

**b)**

| x | f(x) |
|---|---|
| 1 | 4 |
| 2 | 2 |
| 4 | 1 |
| 1 | 4 |

**c)**

| x | f(x) |
|---|---|
| 1 | 5 |
| −2 | 2 |
| 4 | 8 |
| −1 | 3 |

**d)**

| x | f(x) |
|---|---|
| 1 | $-\frac{1}{2}$ |
| 2 | 1 |
| −4 | −2 |
| 1 | $\frac{1}{2}$ |

**e)**

| x | f(x) |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 4 |
| 3 | 9 |
| 4 | 16 |

.....

.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

# Función lineal

**20** Patricia se va de viaje al exterior y decidió alquilar un teléfono celular durante su estadía. Le ofrecen dos opciones: el modelo A, que es el más sencillo, tiene un costo de $0,50 por minuto de comunicación, mientras que por el modelo B, que tiene contestador automático, le piden $3 en concepto de seguro más $0,50 por minuto de comunicación.

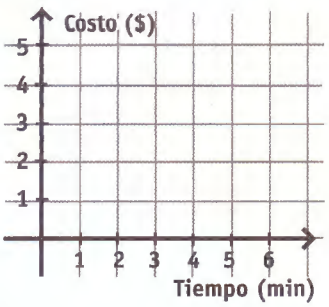
**a)** Completen las siguientes tablas y marquen en el gráfico, con distinto color, los puntos correspondientes a cada modelo.

**b)** Unan los puntos de cada color. ¿Qué forma tienen las gráficas?

.....

| Modelo A | |
|---|---|
| min. | costo |
| 0 | |
| | 0,50 |
| 2 | |
| | 1,50 |
| | |

| Modelo B | |
|---|---|
| min. | costo |
| 0 | |
| | 3,50 |
| 2 | |
| | 4,50 |
| | |

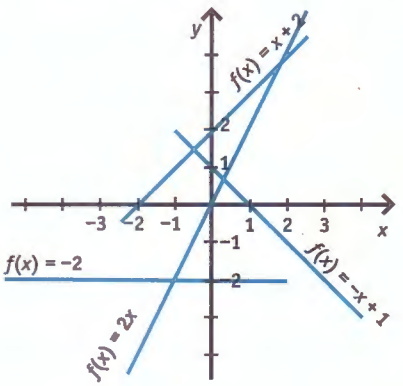



**c)** Escriban una fórmula para cada una de las funciones que graficaron.

A: $f(x)$ = ..... B: $f(x)$ = .....

## Para leer y recordar

- Toda función cuya fórmula es de la forma $f(x) = k \cdot x + b$ recibe el nombre de *función lineal*. Su gráfica es una recta.
- La constante $k$ se llama *pendiente* y está asociada a la inclinación de la recta; $b$ se llama *ordenada al origen* y es la ordenada del punto de contacto de la recta con el eje de ordenadas.
- En los casos en los que $b = 0$, la función, además de ser lineal, es de proporcionalidad directa.
- Si $k = 0$, es una función *constante*.




**21** Consideren las funciones lineales definidas por las siguientes fórmulas:

**a)** $f(x) = 2x + 2$

**b)** $f(x) = -x - 4$

**c)** $f(x) = -5$

**d)** $f(x) = 4x$

**e)** $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$

**f)** $f(x) = 4 - x$

**I.** Grafíquenlas en distintos sistemas cartesianos.

**II.** Indiquen el valor de la ordenada al origen y la pendiente de cada una.

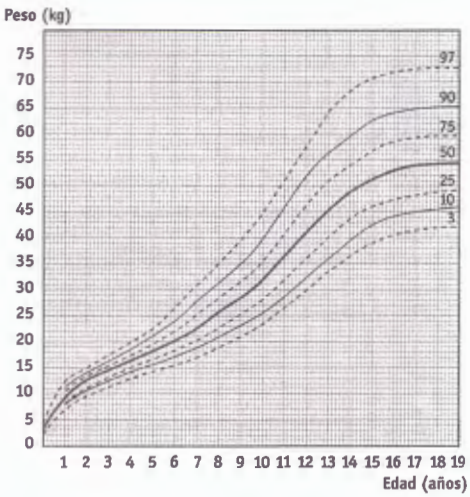
**III.** ¿Cuál de ellas es una función de proporcionalidad directa? Justifiquen.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

# Los gráficos funcionales y la medicina

En muchas disciplinas científicas, es común que los profesionales e investigadores confeccionan gráficos que representan determinados fenómenos "en general". Estos gráficos facilitan el análisis de casos particulares y la consecuente toma de decisiones al respecto. Esto es posible siempre que las variables que intervienen sean cuantitativas y que tenga sentido relacionarlas.
Un ejemplo son los gráficos que usan los pediatras para controlar el desarrollo de los niños y las niñas desde que nacen, ya que suelen presentarse diferencias considerables de tamaño, peso, forma y madurez física.

**22** El siguiente gráfico corresponde al peso de las niñas entre el nacimiento y los 19 años. La curva superior corresponde a los sujetos situados en el percentil 97, mientras que la inferior, a los sujetos situados en el percentil 3. La línea oscura representa el percentil 50.

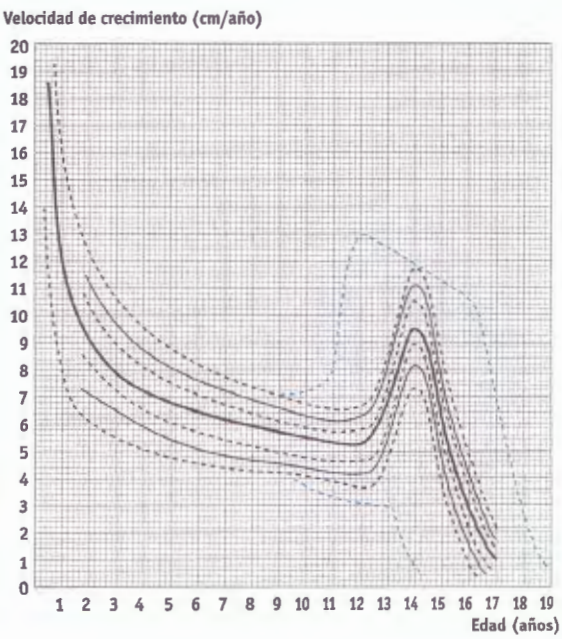



**a)** ¿Entre qué valores de peso debería estar una joven de 12 años?

**b)** Julieta tiene 9 años y el médico le dijo que tenía un percentil de 50. ¿Cuál debería ser su peso?

**c)** La hermana de Juan tiene 6 años y pesa 30 kg. ¿Qué piensan que le dirá el médico a su mamá?

**23** El siguiente gráfico permite observar la velocidad de crecimiento, en talla, de los niños entre el nacimiento y los 19 años.




**a)** ¿Entre qué edades los cambios son muy marcados?

.....

**b)** ¿Cómo se dan cuenta, a partir del gráfico?

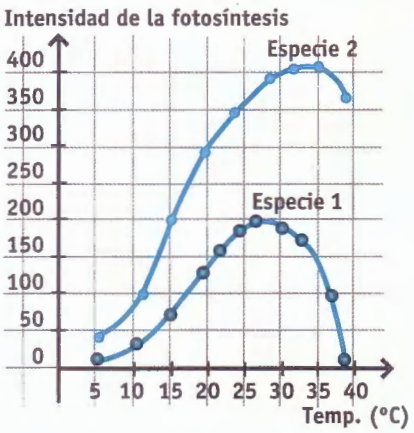
.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

# Los gráficos funcionales y la naturaleza

Para entender cómo crecen las plantas y por qué "purifican" el aire, uno de los fenómenos que se analizan es la *fotosíntesis.* Este proceso consiste en un conjunto de reacciones químicas que ocurren en las partes verdes de las plantas (con clorofila). Allí, el agua tomada por las raíces se combina con el dióxido de carbono proveniente del aire y, gracias a la energía de la luz del sol, se producen glucosa y oxígeno. La glucosa es la base para formar todas las sustancias que la planta necesita para su desarrollo y funcionamiento. Una parte del oxígeno le sirve a la planta para su respiración y el resto se libera al medio y es utilizado por otros seres vivos. La *intensidad* de la fotosíntesis se mide por la cantidad de glucosa producida por unidad de temperatura.

**24** En el siguiente gráfico se representa la intensidad de la fotosíntesis en función de la temperatura para dos especies vegetales. La *especie 1* es una planta de la zona pampeana y la *especie 2*, una planta de la zona tropical.




a) ¿Qué diferencias pueden observar entre ambas curvas?

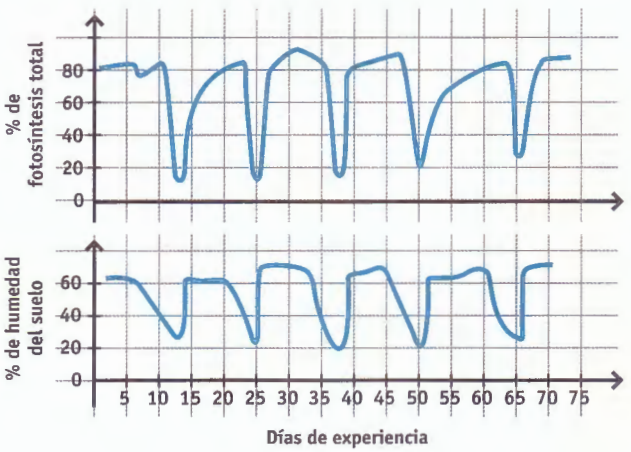
.....

b) ¿A qué temperatura produce mayor cantidad de glucosa cada una de las especies?

.....

**25** Se realizó un experimento durante 75 días para investigar la relación entre la intensidad de la fotosíntesis y la humedad del suelo. Se midieron los dos fenómenos y se volcaron los resultados obtenidos en dos gráficos.

Observen las gráficas y extraigan alguna conclusión respecto de la relación entre el porcentaje de humedad que tiene el suelo y el porcentaje de fotosíntesis que realiza la planta que lo habita.




.....

.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

# MÁS ACTIVIDADES

**26** Un compuesto químico pierde la mitad de su volumen por día al evaporarse.

a) Completen la tabla, considerando un volumen inicial de 20 ml.

| Tiempo (días) | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| Volumen (ml) | | | | |

b) Realicen un gráfico aproximado.

c) ¿Existe entre estas variables una relación de proporcionalidad? ¿Por qué?

**27** Para alquilar una carpa en la playa, Carolina debe pagar cada día un valor fijo de $5 más $2,50 por cada hora que la ocupe (o la parte proporcional si el tiempo es menos que una hora).

a) ¿Cuánto le cuesta la carpa si la alquila por 1 h, 2 h, 3 h, 4 h?

b) ¿Cuánto tiempo la ocupó el martes, que pagó $20?

c) El miércoles pagó la mitad de lo que pagó el martes. ¿Habrá estado la mitad del tiempo?

d) Escriban la fórmula de una función que relacione el costo $C$ con el tiempo de alquiler $t$, hagan una tabla de valores y representen esa función en un gráfico cartesiano.

**28** Lucas entra en un negocio con un billete de $100. El vuelto que reciba al retirarse dependerá del gasto que haya realizado.

a) Completen la tabla.

| Gasto ($) | 40 | 10 | | | 25 |
|---|---|---|---|---|---|
| Vuelto ($) | 60 | | 50 | 15 | |

b) Encuentren la fórmula de una función que relacione ambas variables.

c) ¿Qué tipo de función es?

**29** En una empresa, los obreros ganan un sueldo básico de $500 más un adicional del 10%, calculado sobre el básico, por año de antigüedad.

a) ¿Cuál es el sueldo de un obrero con 6 años de antigüedad?

b) ¿Cuánto cobra un recién ingresado?

c) ¿Qué antigüedad tiene un obrero que cobra $1050?

d) ¿Cuál es la fórmula que relaciona el sueldo percibido con los años de antigüedad en la empresa?

e) ¿A cuál de los modelos estudiados corresponde esta función?

**30** Consideren las siguientes funciones lineales:

a) $f(x) = x - 4$

b) $f(x) = -3 \cdot x + 3$

c) $f(x) = 4$

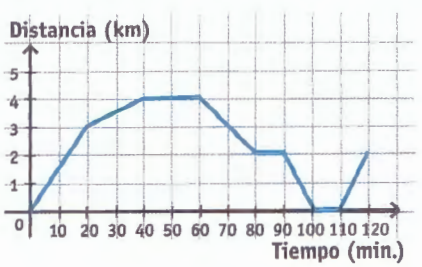
d) $f(x) = \frac{1}{3} \cdot x + 1$

e) $f(x) = \frac{1}{3} \cdot x$

**I.** Represéntenlas en sistemas cartesianos distintos.

**II.** En cada una, indiquen el valor de la pendiente y la ordenada al origen; si es creciente, decreciente o constante; si es de proporcionalidad directa.

**31** Carolina salió a dar un paseo en bicicleta. La gráfica muestra a qué distancia de su casa se encuentra Carolina en cada momento, en función del tiempo transcurrido desde su partida.
Describan el viaje realizado por Carolina de acuerdo con la información que se aprecia en el gráfico.




© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

# AUTOEVALUACIÓN

**1** Gastón llevó a revelar un rollo de 36 fotos que sacó en una salida con sus amigos. En la casa de fotografía le informaron que el costo total de las fotos se calcula así: $3 por el revelado y $0,36 por cada copia que salga bien.

a) Encuentren una fórmula que relacione la cantidad de fotos $x$ y el costo total $c$.

b) ¿Cuánto tuvo que pagar Gastón si le salieron 32 fotos?

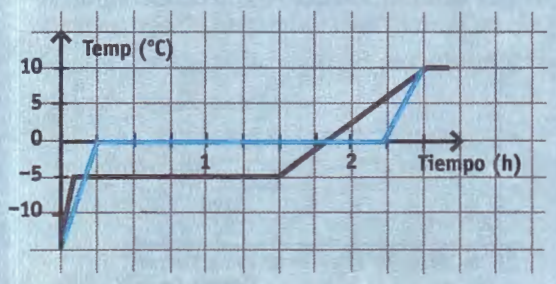
c) Mirta pagó en el mismo negocio $15,24. ¿Cuántas fotos le salieron?

d) Pablo llevó su rollo al mismo lugar y le cobraron $14. Cuando volvió a su casa, sin fijarse en cuántas fotos le habían salido, se dio cuenta de que le habían cobrado mal. ¿Cómo pudo Pablo haber detectado que había un error en su cuenta?

**2** Si sacamos hielo de un freezer a –15 °C, su temperatura aumenta rápidamente hasta llegar a 0 °C. Esta temperatura se mantiene constante mientras se derrite, hasta que no queda más hielo. Luego la temperatura aumenta lentamente hasta llegar a la temperatura ambiente de 10 °C.

Si le agregamos sal al hielo, y repetimos la experiencia, observaremos que comienza a derretirse a una temperatura más baja.

Las siguientes gráficas que se han superpuesto en el mismo sistema de ejes cartesianos corresponden a sendas situaciones (hielo y hielo con sal).




a) ¿Cuál de las dos gráficas representa el hielo con sal?

b) ¿A qué temperatura se derrite el hielo con sal?

c) ¿Cuánto tiempo permanece la temperatura debajo de 0 °C en cada caso?

d) Indiquen en qué tramos es creciente y en cuáles, constante cada una de las gráficas.

**3** Completen cada una de las tablas, que corresponden a funciones de proporcionalidad inversa. Hallen la constante de proporcionalidad y escriban la fórmula correspondiente en cada caso.

a)

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 1 | 15 |
| 3 | |
| | 30 |

b)

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 2,5 | |
| 4 | 10 |
| | 5 |

c)

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 3 | 0,6 |
| | 0,04 |
| 5 | |

**4** En una casa de fotocopiado se ofrecen precios especiales para cuando se hacen varias copias de un mismo original, como muestra el cartel.

| Nro. de fotocopias | 1 a 10 | 11 a 20 | 21 a 30 | 30 ó más |
|---|---|---|---|---|
| Precio ($) por unidad | 0,12 | 0,10 | 0,08 | 0,07 |

a) Completen la tabla siguiente, de acuerdo con la información dada en el cartel.

| Nro. de copias | 1 | 10 | 11 | 20 | 21 | 30 | 31 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Costo final | | | | | | | |

b) Representen los puntos obtenidos en un gráfico cartesiano.

c) ¿Tiene sentido unir los puntos en este gráfico? ¿Por qué?

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

# 8 PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA

**El cálculo de *probabilidades* nos permite analizar qué posibilidad tienen de ocurrir fenómenos que dependen de muchas causas distintas, en los que es muy difícil conocer y predecir los resultados. Cuando queremos calcular probabilidades, necesitamos conocer de cuántas maneras distintas puede ocurrir un suceso, y para ello recurrimos a las llamadas *técnicas de conteo*.**

Verónica tiene una fiesta de cumpleaños esta noche y, como todas las veces, no sabe qué ponerse. Tiene que elegir entre un jean, un pantalón negro, una pollera de cuerina y una pollera larga. Para la parte superior puede optar por una polera negra, un suéter con escote en V o una camisa blanca.

- Si tarda 3 minutos en hacer cada cambio completo de ropa, ¿podrá probarse todas las combinaciones posibles en la media hora que le queda para salir?

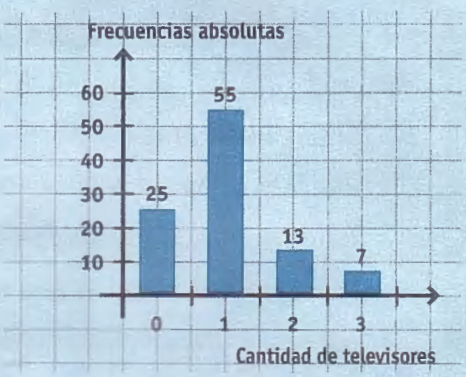
© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

# REVISIÓN INICIAL

**1** Los datos del gráfico de columnas representan la cantidad de televisores por casa de una muestra de 100 familias encuestadas en un partido del conurbano bonaerense.

a) Completen la tabla de frecuencias con los datos del gráfico.

| Televisores | Frecuencia absoluta | Frecuencia relativa | Frecuencia porcentual |
|---|---|---|---|
| 0 | 25 | $\frac{25}{100}$ | 25 |
| 1 | | | |
| 2 | | | |
| 3 | | | |




b) ¿Qué fracción de las familias tiene menos de dos televisores?

.....

c) ¿Qué porcentaje de las familias tiene televisor?

.....

**2** Ordenen de menor a mayor los siguientes números racionales.

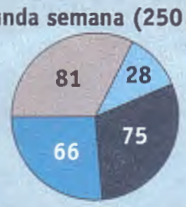
$$-0{,}75 \quad 1 \quad \frac{3}{5} \quad \frac{5}{4} \quad -\frac{2}{3} \quad 0{,}825 \quad \frac{2}{9} \quad \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{4}$$

**3** Se acercan las elecciones para intendente en una ciudad y los alumnos de una escuela realizan encuestas semanales para tratar de anticipar quién será el ganador. Los resultados de las dos primeras semanas del trabajo los volcaron en los siguientes gráficos.

**ELECCIONES PARA INTENDENTE. INTENCIÓN DE VOTO (Cifras en valores absolutos)**

Primera semana (200 casos)

Segunda semana (250 casos)




Fuente: Encuesta realizada por los alumnos de la Escuela Nro. 999.

a) ¿Qué porcentaje de los encuestados optó por López en la primera semana?

b) ¿Qué porcentaje de los encuestados no optó por Méndez en la segunda semana?

c) ¿Qué fracción de los encuestados optó por García en cada semana? ¿En cuál tuvo mayor fracción de votos?

d) ¿En qué porcentaje varió la opción por cada candidato en la segunda semana respecto de la primera?



© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

# Probabilidad

## Para leer y recordar

- Llamamos *experimentos aleatorios* a aquellos en los cuales, a pesar de conocer qué resultados pueden ocurrir, no podemos predecir ninguno de ellos en particular.
- El conjunto de resultados posibles de un experimento aleatorio se llama *espacio muestral*.
- A cualquier conjunto de resultados posibles de un experimento aleatorio lo llamamos *suceso*.
- Cuando los resultados posibles de un experimento aleatorio se pueden contar y tienen todos la misma posibilidad de ocurrir, la *probabilidad* de que suceda cada uno de ellos se calcula mediante la siguiente fórmula:

$$P(\text{Suceso}) = \frac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número total de casos posibles}}$$

Por ejemplo, si lanzamos un dado equilibrado, el espacio muestral es este:

E = {1; 2; 3; 4; 5; 6}  (hay 6 resultados posibles)

Podemos considerar el suceso S = "sale par" y calcular su probabilidad.

S = {2; 4; 6}  (hay 3 resultados favorables a la condición establecida)

$P(S) = \frac{3}{6} = 0{,}5$

**4** Josefina compró un CD que trae 8 temas de Araknido y 7 de Aluminika. Lo puso en el equipo de música y eligió con el control remoto un tema al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea de Araknido?

.....

b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea el tema 3, que se llama "No te vayas sin llevarme"?

.....

**5** Se tira una vez cada uno de los dados que ven en la imagen (uno es icosaédrico, otro es dodecaédrico y el otro es octaédrico).

a) Calculen para cada uno de ellos:

I. La probabilidad de sacar un 7.

II. La probabilidad de sacar un número menor o igual que 8.

b) Supongan que alguien les ofrece un premio por sacar un 5, y tienen que elegir uno de los dados para arrojarlo una vez. ¿Cuál elegirían? ¿Por qué?

**6** En una bolsa hay diez bolitas numeradas de cero a nueve. Se sacan dos al azar y se suman sus valores. Calculen la probabilidad de que el resultado de la suma sea:

a) 8.  b) mayor que 5.  c) menor o igual que 2.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

# Técnicas de conteo

**7** Para viajar desde la localidad Los Dados hasta La Ruleta hay que hacer un trayecto por tierra, otro por aire y un tercero por agua. Las distintas alternativas de viaje posibles aparecen representadas en el esquema.

a) Enumeren todas las posibles combinaciones.

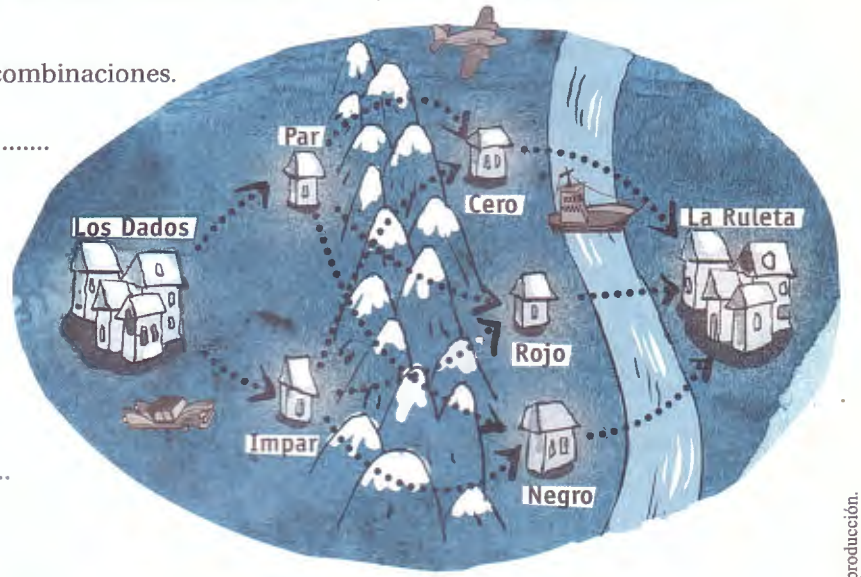
.....

.....

.....

b) ¿De cuántas formas posibles se puede viajar desde Los Dados hasta La Ruleta?

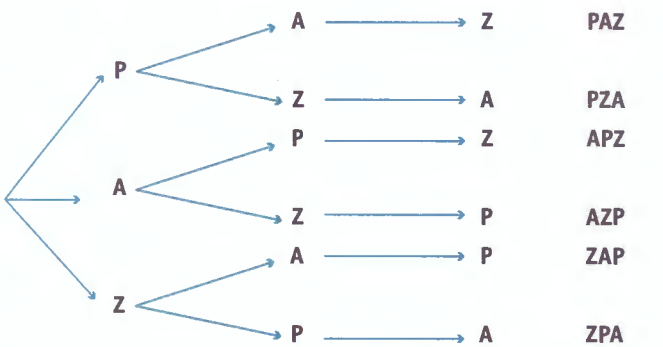
.....




## Para observar

### Diagrama de árbol

**Para contar de manera organizada todas las alternativas posibles que se presentan en algunas situaciones, a veces es útil recurrir a una disposición que se llama *diagrama de árbol*. Por ejemplo, para contar de cuántas maneras se pueden ordenar las letras de la palabra "PAZ", podemos organizar el conteo de la siguiente forma:**




| 3 ramas | 2 ramas de cada letra | 1 rama de cada letra | 6 palabras |
|---|---|---|---|
| 3 | · 2 | · 1 | = 6 |

**8** El primer día de clase, Inés llevó una sola carpeta para cuatro materias (Matemática, Lengua, Ciencias Naturales y Ciencias Sociales). Construyan un diagrama de árbol y calculen de cuántas maneras distintas puede ordenar las carátulas.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

**9** ¿Cuántos menús distintos se pueden armar en el restaurante Don Alfredo? Enumérenlos mediante un diagrama de árbol.

.....

.....

.....

.....

## Para observar

### Diagrama de casillas

**Para contar todas las alternativas posibles en el problema anterior, podemos utilizar un *diagrama de casillas*, en el cual contamos mentalmente todas las posibilidades para cada plato y, luego, las multiplicamos para obtener todas las combinaciones posibles.**

| | Entrada | Plato caliente | Postre |
|---|---|---|---|
| Opciones | 2 | 3 | 2 |
| Son en total | 2 . 3 . 2 = 12 opciones | | |

**10** En un baile se sortean tres pares de zapatillas de la marca que lo auspicia, con el número de la entrada. En total hay 250 personas en el local. Completen el diagrama y averigüen de cuántas formas distintas se pueden repartir los tres premios.

| Par sorteado | 1.° | 2.° | 3.° |
|---|---|---|---|
| Posibles ganadores | | | |

**11** El equipo formado por Sara, Mario, Inés y Pedro ganó las Olimpíadas Intercolegiales de Informática. Para la entrega de premios, el fotógrafo del diario barrial les solicitó que posaran para la foto de tapa, junto con la profesora que los había entrenado.

a) ¿De cuántas maneras distintas se pueden ubicar todos en una fila?

b) ¿Y si la profesora quiere estar en el medio?

c) ¿Y si los varones van a la izquierda y la profesora, en el medio?

d) ¿Y si se ubican alternados varones y mujeres?

**12** En un cibercafé hay 8 computadoras, de las cuales 3 tienen problemas en el teclado. Hallen la probabilidad de que al elegir 2 computadoras al azar, ninguna de ambas tenga problemas en el teclado.

.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

# Estadística

## Para leer y recordar

Recordemos que la *estadística* se ocupa de recolectar, organizar y analizar conjuntos de datos. Habitualmente se trabaja con una *muestra,* que es una parte del conjunto que se quiere analizar, el cual se denomina *población.* Las características que se estudian en los individuos son las *variables.* Estas se llaman *cuantitativas* cuando toman valores numéricos y *cualitativas* cuando toman valores no numéricos. Para analizar los datos de los que se dispone, se confeccionan *tablas de frecuencias,* teniendo en cuenta la siguiente terminología:

- *Frecuencia absoluta* ($f_a$) es la cantidad de veces que aparece cada valor de la variable en la muestra.
- *Frecuencia relativa* ($f_r$) es la fracción del total de la muestra que corresponde a cada valor de la variable. Se calcula dividiendo la frecuencia absoluta por la cantidad total de observaciones consideradas en la muestra *(n):* $f_r = \frac{f_a}{n}$. Este valor puede escribirse como fracción irreducible o como número decimal.
- *Frecuencia porcentual* ($f_p$) es el porcentaje del total de elementos de la muestra que corresponde a cada valor de la variable y se calcula multiplicando por 100 la frecuencia relativa: $f_p = f_r \,.\, 100$.
- El *intervalo de clase [m; n)* agrupa a todos los números comprendidos entre *m* y *n,* incluyendo a *m* pero no a *n.* El agrupamiento por intervalos de clase se utiliza para variables cuantitativas en los casos en que las muestras tienen gran diversidad de valores.

**13** En la escuela, hay un grupo de varones que se entrena en fútbol. Las categorías del campeonato de la zona son estas: 11 a 13 años, 14 a 16 años y 17 a 19 años. Las edades de los participantes van desde los 11 hasta los 19 años, según el siguiente detalle:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 11 | 15 | 18 | 17 | 17 |
| 19 | 15 | 13 | 13 | 12 |
| 14 | 14 | 17 | 18 | 17 |
| 16 | 14 | 16 | 15 | 16 |
| 12 | 13 | 18 | 18 | 17 |

**a)** Completen la tabla de frecuencias.

| Edad | Frecuencia absoluta $f_a$ | Frecuencia relativa $f_r$ | Frecuencia porcentual $f_p$ |
|---|---|---|---|
| [11 a 14) | 6 | $\frac{6}{25}$ | 24 |
| [14 a 17) | | | |
| [17 a 20) | | | |

**b)** ¿Qué porcentaje está en la segunda categoría?

**c)** ¿Qué fracción de los que entrenan es mayor de 17 años?

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

# Tablas de frecuencias: intervalos de clase

**14** Los alumnos de la escuela hicieron un registro de los minutos que tardan en llegar desde sus casas a la escuela. Al iniciar la hora de clase todos anotaron sus tiempos del día en el pizarrón y quedó formada la siguiente muestra:

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 2 | 17 | 45 | 32 | 24 | 3 | 37 | 42 | 58 | 12 | 18 | 21 | 21 | 15 |
| 12 | 10 | 27 | 31 | 45 | 16 | 17 | 15 | 48 | 53 | 35 | 32 | 21 | 25 | 37 |

La profesora pidió que construyeran una tabla de frecuencias para estos datos.

Pablo diseñó esta tabla:

| Tiempo | $f_a$ | $f_r$ | $f_p$ |
|---|---|---|---|
| [1; 20) | 11 | $\frac{11}{30}$ | 36,67 |
| [20; 40) | | | |
| [40; 60) | | | |

Silvia la pensó así:

| Tiempo | $f_a$ | $f_r$ | $f_p$ |
|---|---|---|---|
| [1; 12) | | | |
| [12; 24) | | | |
| [24; 36) | | | |
| [36; 48) | | | |
| [48; 60) | 3 | $\frac{3}{30}$ | 10,00 |

a) Expliquen en qué se diferencian las dos tablas propuestas.

.....

b) Completen en cada tabla los valores que faltan.

**15** Un médico está investigando una enfermedad cardíaca y su relación con el colesterol. Para ello registró las mediciones de colesterol (en mg por dl de sangre) de los análisis clínicos de 30 de sus pacientes. Los datos fueron los siguientes:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 185 | 210 | 230 | 224 | 195 | 214 | 186 | 197 | 240 | 203 |
| 190 | 233 | 238 | 198 | 254 | 215 | 216 | 205 | 237 | 225 |
| 187 | 225 | 234 | 215 | 235 | 213 | 195 | 203 | 215 | 239 |

a) Completen la tabla.

| x (mg/dl) | $f_a$ | $f_r$ | $f_p$ |
|---|---|---|---|
| [180; 200) | | | |
| [200; 220) | | | |
| [220; 240) | | | |
| [240; 260) | | | |
| Total | | | |

b) ¿Cuántos pacientes tienen una medición de colesterol por debajo de 220?

.....

c) Si se consideran valores normales aquellos que están entre 180 y 200, ¿qué porcentaje de los pacientes está fuera de esos parámetros?

.....

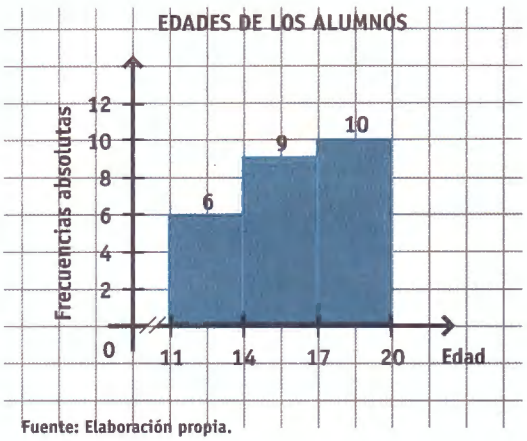
© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

# Lectura de gráficos estadísticos

**16** El histograma que aparece a continuación muestra la distribución de edades de los integrantes del equipo de fútbol de una escuela.

a) Completen la tabla con los datos del gráfico.

| Edad (años) | $f_a$ |
|---|---|
| [11;14) | |
| [14; 17) | |
| [17; 20) | |



Fuente: Elaboración propia.

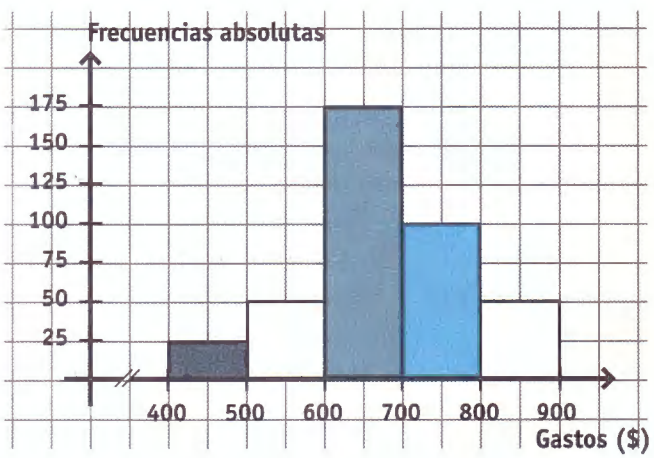
b) ¿Qué tamaño tiene la muestra?

.....

**17** Se encuestó a 400 familias, habitantes de una zona industrial del Gran Buenos Aires. Los datos que aparecen en el histograma que sigue corresponden a los gastos semanales de cada familia encuestada.

a) Completen la tabla con los datos del gráfico.

| Gastos ($) | Frecuencia absoluta |
|---|---|
| [400; 500) | |
| [500; 600) | |
| [600; 700) | |
| [700; 800) | |
| [800; 900) | |




b) ¿Qué rango de gasto familiar semanal es menos frecuente entre los encuestados?

.....

c) ¿Qué rango de gasto familiar mensual es más frecuente entre los encuestados?

.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

# El promedio, la moda y la mediana

## Para observar

Cuando se trabaja con muestras de datos numéricos, suele buscarse algún valor que "represente" a la muestra.

Por ejemplo, en la ilustración se indican las cantidades de dinero que trajeron los chicos para gastar en el kiosco.

*El promedio o media* ($\bar{x}$) de la cantidad de dinero se calcula sumando el dinero de todos y dividiéndolo por la cantidad de personas.

$$\frac{2 + 1{,}55 + 0{,}10 + 0{,}75 + 0{,}10}{5} = \$0{,}90 \qquad \bar{x} = \$0{,}90$$

*La moda* ($M_o$) de la cantidad de dinero que trajeron es \$0,10 porque hay más chicos que trajeron esa suma.

$$M_o = \$0{,}10$$

*La mediana* ($M$) de la cantidad de dinero que trajeron es \$0,75 y se obtiene así: se ordenan los valores de menor a mayor y se ubica *el valor del medio* (cuando la cantidad de datos es par, se toma el promedio entre los dos centrales).

$$\$0{,}10 - \$0{,}10 - \boxed{\$0{,}75} - \$1{,}55 - \$2$$

$M$ = \$0,75. Esto quiere decir que la mitad de los chicos trajeron \$0,75 o menos.

**18** Hallen la media, la moda y la mediana de cada una de las siguientes muestras, y reflexionen acerca de los valores obtenidos en cada caso.

a) Cantidad de horas extras mensuales trabajadas por 9 obreros.

40 25 36 12 40 25 40 32 38

b) Años de antigüedad en el trabajo de 8 profesores.

7 2 20 12 9 3 18 6

c) Precio, en pesos, de un chicle en 6 kioscos.

0,42 0,47 0,44 0,49 0,47 0,42

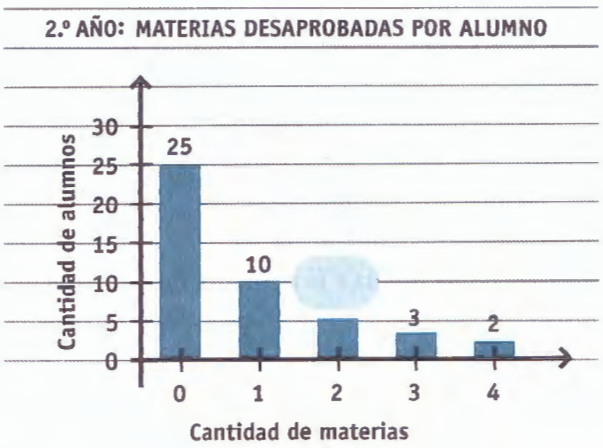
**19** El gráfico corresponde a la cantidad de materias desaprobadas por 45 alumnos de segundo año.

a) Coloquen el rótulo faltante en la tercera columna.

b) ¿Qué cantidad de materias desaprobadas es la más frecuente?

c) Hallen la media y la mediana. (Si lo necesitan, construyan la tabla de frecuencias).

d) ¿Cómo ubican la moda en el diagrama sin guiarse por la tabla?




Fuente: Secretaría de la escuela.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

## Para observar

La siguiente tabla de frecuencias absolutas corresponde a los pesos, en kilogramos, de 20 adultos que asistieron a una clínica de nutrición.

| | Peso | $f_a$ |
|---|---|---|
| • | [60; 70) | 5 |
| ♦ | [70; 80) | 3 |
| ▲ | [80; 90) | 4 |
| * | [90; 100) | 7 |
| ♠ | [100; 110) | 1 |

Cuando disponemos de información dada en intervalos de clase, podemos aproximar la *media* utilizando el promedio de cada intervalo como representante. En este ejemplo, el cálculo es el siguiente:

$$\bar{x} = \frac{65 \cdot 5 + 75 \cdot 3 + 85 \cdot 4 + 95 \cdot 7 + 105 \cdot 1}{20} = 83$$

El *intervalo de la moda* es [90; 100) porque es el de mayor frecuencia.

Para ubicar *el intervalo de la mediana* ordenamos "figurativamente" los datos de menor a mayor y buscamos en qué intervalo se encuentran el dato o los datos centrales.

| • | • | • | • | • | ♦ | ♦ | ♦ | ▲ | ▲ | ▲ | ▲ | * | * | * | * | * | * | * | ♠ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.° | 2.° | 3.° | 4.° | 5.° | 6.° | 7.° | 8.° | 9.° | 10.° | 11.° | 12.° | 13.° | 14.° | 15.° | 16.° | 17.° | 18.° | 19.° | 20.° |

Pueden observar que los datos centrales, que en este caso son el 10.° y el 11.°, se encuentran en el intervalo [80; 90). Este es el intervalo de la mediana y es el que acumula en la frecuencia la mitad de las observaciones.

**20** Una cadena de supermercados recibió quejas de sus clientes respecto del contenido de papas fritas en las bolsas de 100 g. Para verificar el contenido de las bolsas cuestionadas, pesaron 50 unidades de un cargamento. Los resultados que obtuvieron son los siguientes:

| Peso (gramos) | [85; 90) | [90; 95) | [95; 100) | [100; 105) | [105; 110) |
|---|---|---|---|---|---|
| Cantidad de bolsas | 2 | 3 | 15 | 28 | 2 |

a) Aproximen la media, la mediana y la moda de esta muestra.

b) Con los datos obtenidos, ¿qué conclusiones pueden sacar?

**21** La madre de Juan recibió una factura de electricidad con un importe que le pareció muy alto. Antes de efectuar el reclamo ante la compañía, anotó los consumos (en kWh) de las facturas de los últimos cuatro años y obtuvo el siguiente registro.

| | 1.° bimestre | 2.° bimestre | 3.° bimestre | 4.° bimestre | 5.° bimestre | 6.° bimestre |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1996 | 414 | 457 | 404 | 416 | 478 | 579 |
| 1997 | 425 | 426 | 472 | 409 | 387 | 532 |
| 1998 | 420 | 407 | 433 | 320 | 490 | 449 |
| 1999 | 510 | 387 | 417 | 434 | 412 | 373 |

a) Hallen la media y la mediana de los datos:
**I.** de cada año. **II.** de los cuatro años.

b) Construyan una tabla de frecuencias con los datos agrupados en intervalos y aproximen la media, la mediana y la moda. Comparen con los resultados obtenidos en a).

c) Si la factura fue de 600 kWh, ¿les parece que tomarán en cuenta el reclamo? ¿Por qué?

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

# Las probabilidades y los juegos de azar

Muchos juegos de azar se jugaban desde muchos años antes de que los matemáticos pudieran dar explicaciones a las leyes que regulaban sus resultados. Uno de los científicos que estudiaron las reglas del azar en los juegos de dados fue Galileo Galilei (1564-1642).

En la época de Galileo, el príncipe de Toscana jugaba a un juego que estaba muy de moda en esos tiempos, llamado el *pasadiez*. Este consistía en arrojar tres dados, y el jugador ganaba si la suma de las caras hacia arriba era un número mayor que diez.

Luego de realizar algunos cálculos, se puede concluir que, en este juego, la probabilidad de ganar y la de perder son iguales. Esto surge de considerar que cada suma mayor que diez en las caras hacia arriba se corresponde con una suma menor o igual a diez en las caras hacia abajo.

Por ejemplo: a la suma $6 + 5 + 4 = 15$, se le opone la suma $1 + 2 + 3 = 6$ (recuerden que, en todo dado bien construido, las sumas de las caras opuestas son siempre iguales a 7).

En cierta ocasión, el príncipe le preguntó a Galileo: ¿por qué el diez sale más veces que el nueve, si hay seis formas de obtener cada una de las sumas?

$$10 = 6 + 2 + 2 = 6 + 3 + 1 = 5 + 4 + 1 = 5 + 3 + 2 = 4 + 4 + 2 = 4 + 3 + 3$$
$$9 = 6 + 2 + 1 = 5 + 2 + 2 = 5 + 3 + 1 = 4 + 4 + 1 = 4 + 3 + 2 = 3 + 3 + 3$$

**22** Ariel y Mariano están jugando un juego de tablero que tiene dos dados: uno rojo y uno verde. A Ariel, le faltan siete puntos para finalizar el juego; y a Mariano, seis puntos. Antes de arrojar los dados, Mariano le dice a Ariel:

–Estamos empatados, tenemos los dos las mismas posibilidades. Porque, para que los dos dados sumen seis, hay tres posibilidades, y para que sumen siete, también: para el seis, uno y cinco, dos y cuatro o tres y tres; y para el siete, cicno y dos, seis y uno; tres y cuatro.

A lo cual, Ariel contesta:

–Esto no es cierto. Para sumar siete, hay seis formas; y para sumar seis, hay solamente cinco. Por lo tanto, yo tengo más probabilidades.

¿Cuál de los dos tiene razón? ¿Por qué?

.....

.....

**23** Jueguen algunas manos del pasadiez, y luego, respondan: ¿qué creen que le contestó Galileo al príncipe?

.....

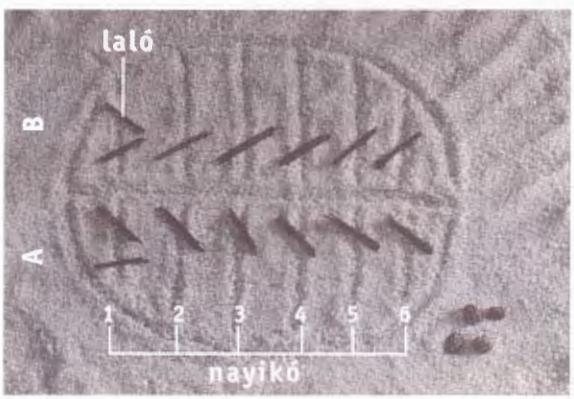
.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

# El yolé

¿Habían oído hablar del *yolé*? A este juego, parecido al actual juego del ludo, lo jugaban las mujeres mocovíes antes de la llegada de los europeos a nuestro continente. Ellas trazaban el tablero en la tierra y construían las fichas con palitos.

**Número de jugadores:** 2
**Objetivo:** capturar las fichas del adversario.
**Materiales:** tablero, llamado *ikodok*, dividido en dos campos (A y B), uno para cada jugador, con 6 líneas transversales llamadas *nayikó;* catorce fichas en forma de palito, llamadas *laló,* y 4 mitades de carozos de durazno.
**Preparación del tablero:** cada jugador coloca sobre la primera línea transversal dos fichas; las restantes se ubican en las demás líneas.




**Puntaje de los carozos:** se arrojan a la vez los cuatro medios carozos, considerando cara a la parte plana.

| Si se obtienen | El puntaje es |
|---|---|
| 4 caras abajo | 4 puntos |
| 4 caras arriba | 3 puntos |
| 3 caras arriba | 0 punto o *kaiká* |
| 3 caras abajo | 0 punto o *kaiká* |
| 2 caras abajo | 1 punto o *yolé* |

**Desarrollo del juego**

- Tirar los carozos una vez cada uno. El que saca mejor puntaje comienza el juego. En caso de empate, repetir hasta definir el primer jugador.
- El primer jugador tira los carozos y comienza avanzando una de las fichas de la primera línea tantos lugares como puntos obtenga. Repite este procedimiento hasta obtener *kaiká*. Entonces, pierde el turno y pasa los carozos al adversario.
- El recorrido de las fichas va desde la línea 1 hasta la 6 de su campo y desde la 6 hasta la 1 del campo adversario, realizando un camino de ida y vuelta hasta que pierde la ficha en juego.
- Cuando la ficha está en el campo adversario, se "come" a las contrarias de todas las líneas donde cae.
- La ficha en juego se pierde cuando se obtiene *kaiká* sobre la línea 6, o bien cuando es comida por una ficha contraria.
- Cuando el adversario come la ficha en juego se comienza a mover la más cercana a la primera línea.
- El juego finaliza cuando uno de los jugadores se queda sin fichas.

24 Intenten jugar una partida. (Si no consiguen carozos de durazno, pueden usar mitades de cáscaras de nuez). Analicen las reglas del juego y, luego, respondan a las preguntas.

a) ¿Por qué les parece que asignaban distinto puntaje a 4 caras arriba y 4 caras abajo?

b) Si tuvieran que construir dados o usar algunos de los que ya tienen construidos para jugar a este juego, ¿cómo asignarían los puntajes?

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

# MÁS ACTIVIDADES

**25** La mamá de Ignacio preparó pizza para los chicos que fueron a estudiar a su casa. En la heladera tenía tomate, jamón y aceitunas para poner sobre la mozarela.

**a)** ¿Cuántas pizzas distintas puede hacer? (Consideren que puede preparar desde una pizza sólo de mozarela hasta una con todos los ingredientes).

**b)** Los chicos están en el comedor y no saben qué pizza eligió hacer la mamá de Ignacio primero. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera pizza que lleve a la mesa tenga jamón?

**26** La lista que sigue corresponde al salario (en $) de 40 empleados en un centro comercial.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 250 | 750 | 800 | 1 050 | 470 | 840 | 750 | 580 | 670 | 580 |
| 610 | 940 | 990 | 900 | 800 | 760 | 450 | 540 | 560 | 755 |
| 832 | 990 | 990 | 990 | 455 | 532 | 837 | 870 | 400 | 500 |
| 530 | 760 | 830 | 995 | 1030 | 1050 | 295 | 330 | 450 | 1000 |

**a)** Completen las frases.

El salario promedio de la muestra es .....

La mitad de los empleados gana menos de .....

El salario más frecuente es .....

**b)** Construyan una tabla de frecuencias.

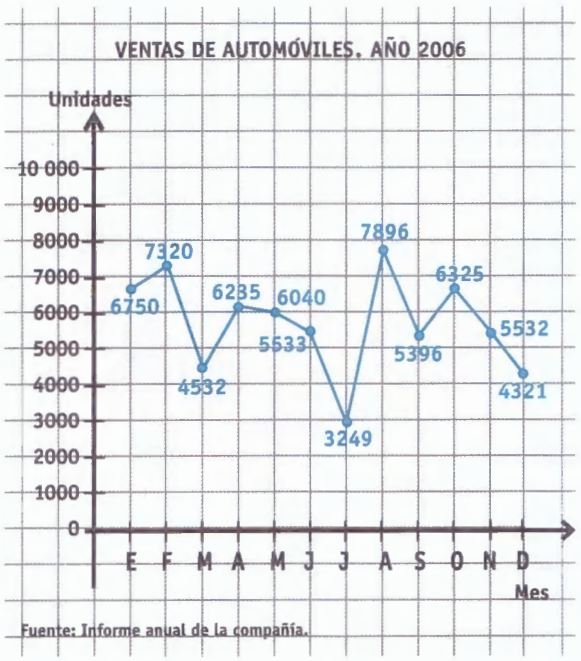
**c)** Grafiquen un histograma para los datos de la lista.

**d)** Consideren las tres categorías de empleados del cuadro.

| Categoría | Salario ($) |
|---|---|
| A | 1 a 500 |
| B | 501 a 750 |
| C | 751 ó más |

¿Cuál es la probabilidad de que un empleado elegido al azar sea de categoría A?

**27** Los datos del gráfico de líneas corresponden a las ventas mensuales (en unidades) de una concesionaria automotriz.




**a)** ¿En qué mes se vendió más?

**b)** ¿En qué mes se produjo el mayor aumento en las ventas?

**c)** ¿En qué mes se produjo la mayor disminución en las ventas?

**d)** Hallen la cantidad promedio de autos vendidos por mes y la mediana.

**e)** Confeccionen un gráfico de columnas con las ventas por trimestre.

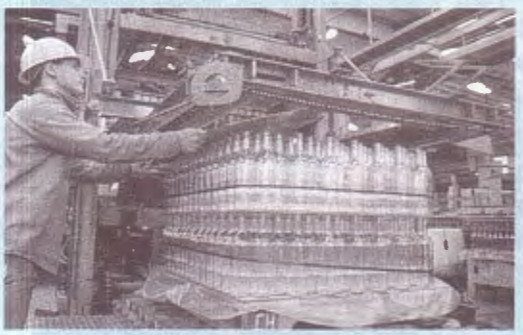
**f)** Si se elige un mes al azar, ¿cuál es la probabilidad de que en ese mes se hayan vendido menos de 5000 unidades?

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

# AUTOEVALUACIÓN

**1** En una planta embotelladora de gaseosas se midió el contenido de 40 botellas de dos litros y cuarto, y se obtuvieron los siguientes resultados (en $cm^3$):

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2250 | 2245 | 2185 | 2144 | 2150 | 2230 | 2205 | 2302 | 2225 | 2253 |
| 2249 | 2258 | 2240 | 2265 | 2222 | 2155 | 2125 | 2251 | 2249 | 2279 |
| 2195 | 2230 | 2248 | 2258 | 2295 | 2301 | 2195 | 2243 | 2259 | 2257 |
| 2251 | 2251 | 2249 | 2247 | 2265 | 2140 | 2257 | 2260 | 2265 | 2251 |



a) Construyan una tabla de frecuencias con los datos.

b) Calculen el contenido promedio de las botellas de la muestra.

c) ¿Pueden calcular, a partir de la tabla realizada, cuántas botellas hay en esta muestra con más contenido que el declarado? De no ser posible, respondan a partir de los datos de la muestra.

d) Construyan un histograma para el contenido de las botellas.

e) Si las botellas con menos de 2150 $cm^3$ se descartan y las que tienen 2300 $cm^3$ o más se consideran excedidas de contenido, construyan una tabla de frecuencias con tres categorías: *para descartar, aceptables* y *excedidas.*

f) ¿Cuál de las tres categorías es la más frecuente?

g) Se considera "buena" una producción cuando son aceptables más del 90% del total embotellado. ¿Se puede considerar "buena" esta producción?

**2** Consideren la palabra MOJAN.

a) ¿De cuántas maneras distintas se pueden ordenar las letras de esta palabra? (Tengan en cuenta en todos los casos usar las cinco letras. Por ejemplo: JMNOA).

b) ¿Cuántas de ellas comienzan con vocal?

c) Si se escribieran todos los órdenes posibles en tarjetas y se tomara una al azar, ¿cuál sería la probabilidad de que la tarjeta obtenida tenga una vocal en el medio?

**3** En el sistema de patentamiento de autos vigente en la Argentina, se utilizan placas que tienen tres letras seguidas de tres dígitos. Las letras habilitadas para tal fin son 26.

a) ¿Cuántas placas distintas se pueden confeccionar si se consideran todas las combinaciones posibles?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que una de ellas, tomada al azar, comience con A?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que una de ellas, tomada al azar, comience con PIO?

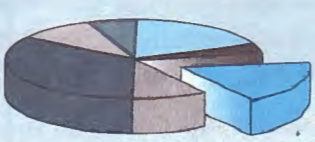
**4** Los datos del gráfico corresponden a la cantidad de turistas de países americanos que arribaron a la Argentina en 1998. Calculen la probabilidad de que ocurran los siguientes sucesos con un turista elegido al azar.

a) Ser uruguayo.

b) No ser chileno.

c) Provenir de EE. UU. o de Paraguay.

**TURISTAS DE PAÍSES AMERICANOS (Año 1998)**



| | |
|---|---|
| Brasil | 732 396 |
| Bolivia | 173 274 |
| Chile | 727 478 |
| Paraguay | 380 218 |
| Uruguay | 1 377 288 |
| EE. UU. | 386 851 |
| Resto | 254 724 |

Fuente: INDEC.

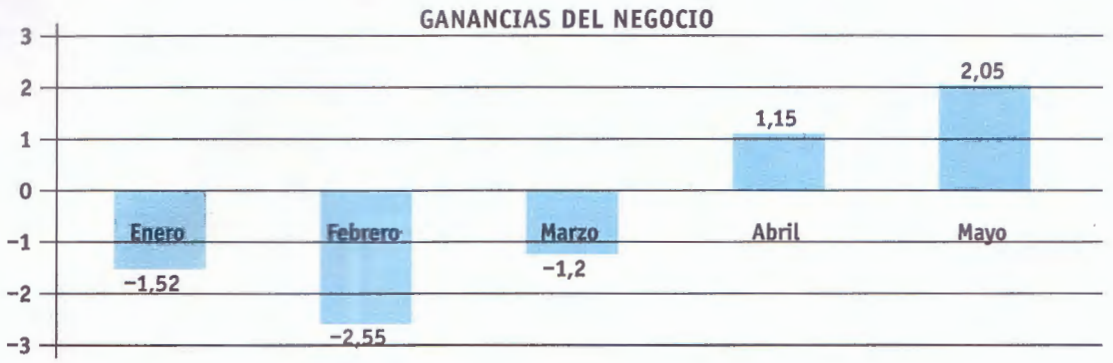


© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

# ACTIVIDADES INTEGRADORAS

**1** Juan y Carla se asociaron y pusieron un negocio de ropa. Los primeros meses, les fue bastante bien con las ventas, pero el negocio no les dio ganancias, ya que debieron usar el dinero que les ingresó para cubrir los gastos del inicio.

El gráfico que sigue corresponde al rendimiento mensual del negocio (en miles de pesos) durante los primeros 5 meses de funcionamiento.




a) ¿Cuál debe ser la ganancia mínima necesaria, en el mes de junio, para que el negocio, al fin del semestre, no haya dado pérdidas?

b) ¿Cuál sería la ganancia mediana en ese caso?

**2** Aldana y Jimena juegan con un juego de fichas algebraicas, con las siguientes reglas:

- Se reparten 3 fichas a cada una y se colocan 4 fichas boca arriba en la mesa.
- Se tira el dado. Cada una reemplaza la letra $x$ de sus fichas por el valor que salió en el dado y suma los valores que obtiene. Gana la mano la que suma más puntos.
- En la segunda mano, cada una elige y levanta una ficha de las que están en la mesa. Se vuelve a tirar el dado y a sumar los puntos.
- En la mano siguiente, se mezclan las fichas y se vuelve a empezar.

Observen las fichas que salieron en una mano de este juego y respondan a las preguntas.

a) ¿Cuál de las dos tiene más probabilidades de ganar? ¿Por qué?

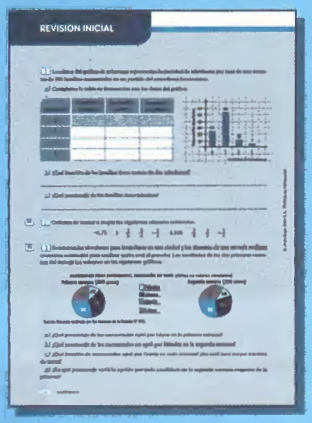
b) Si en el dado sale un seis, ¿quién gana esa mano?

c) ¿Cuál es la ficha que conviene levantar? ¿Por qué?

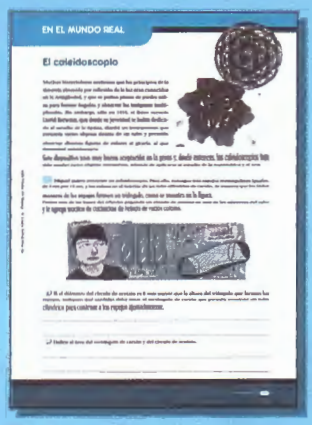
© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

# Cómo son estos cuadernillos

**Apertura**
Una situación disparadora es el eje que abre cada capítulo.



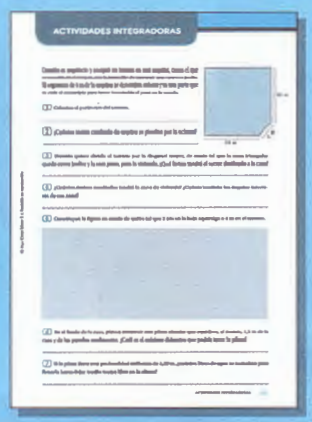

**Revisión inicial**
Incluye actividades para repasar los conocimientos previos.



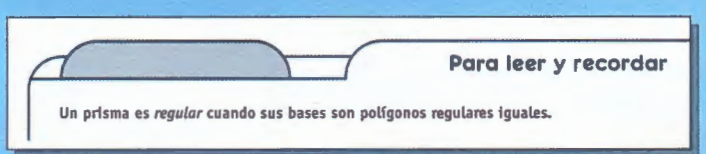

**En el mundo real**
Trata ejemplos con datos concretos, vinculados a aplicaciones a otras disciplinas y a situaciones cotidianas.

**Más actividades**
Contiene una serie adicional de ejercitaciones diversas de todos los temas desarrollados en el capítulo.

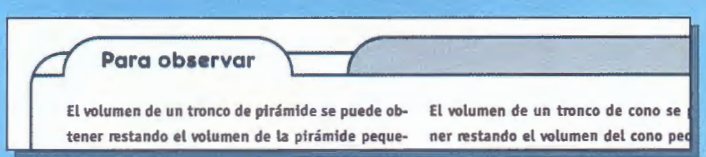
**Autoevaluación**
Se propone una combinación de actividades que servirá a modo de evaluación de los contenidos tratados en el capítulo.




**Actividades integradoras**
Al final de los cuadernillos 3, 5 y 8, se presenta una sección con propuestas destinadas a interrelacionar los contenidos de los cuadernillos anteriores.




Los recuadros identificados con la leyenda **Para leer y recordar** contienen información necesaria para la resolución de las actividades (conceptos, fórmulas, definiciones).


Para observar
El volumen de un tronco de pirámide se puede obtener restando el volumen de la pirámide peque-
El volumen de un tronco de cono se
ner restando el volumen del cono pe

Los recuadros identificados con la leyenda **Para observar** contienen ejemplos explicados.

Este ícono indica que la actividad debe ser resuelta en una hoja aparte.

Un número con fondo de color indica que la actividad es de mayor complejidad.

AIQUE